

MODUL PELATIHAN
OLIMPIADE MATEMATIKA
SMA SUTOMO

Disusun oleh :

(Ass. Prof) Dr. Anton Wardaya, M.Sc, M.PP, CDMS

Wardaya College

www.wardayaonline.com

www.wardayacollege.com

Bab 1

ALJABAR

A. IDENTITAS ALJABAR

Identitas Aljabar yang diperlukan dalam menyelesaikan soal olimpiade

$$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b).(a^2 - a.b + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b).(a^2 + a.b + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$$

Contoh :

Jika $a + b + c = 0$, buktikan $a^3 + b^3 + c^3 = 3.a.b.c$

Latihan :

1. Faktorkan $(x + 2.y - 3.z)^3 + (y + 2.z - 3.x)^3 + (z + 2.x - 3.y)^3$
2. Tunjukkan : $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ merupakan bilangan rasional
3. Jika $x = \sqrt{5 + \sqrt{5}}$ dan $y = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$, tentukanlah nilai $x^6 + y^6$
4. Jika $x = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$, tentukanlah nilai $\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$
5. Tentukanlah nilai dari : $\sqrt{2 + \sqrt{3}} . \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} . \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} . \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$
6. Tentukanlah nilai dari : $\frac{1}{3^{-1000} + 1} + \frac{1}{3^{-999} + 1} + \frac{1}{3^{-998} + 1} + \dots + \frac{1}{3^{998} + 1} + \frac{1}{3^{999} + 1} + \frac{1}{3^{1000} + 1}$

7. Sederhanakan : $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{35} + \sqrt{21} + 5}{\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}}$

8. Buktikan : $\frac{(a+2)^2 \cdot (a-3) + (a^2-4) \cdot \sqrt{a^2-9}}{(a-2)^2 \cdot (a+3) + (a^2-4) \cdot \sqrt{a^2-9}} = \frac{(a+2)\sqrt{a-3}}{(a-2)\sqrt{a+3}}$ untuk $a \geq 3$

9. Tentukan nilai dari : $\frac{(61^4 + 324)(73^4 + 324)(85^4 + 324)(97^4 + 324)}{(55^4 + 324)(67^4 + 324)(79^4 + 324)(91^4 + 324)}$

10. Tentukan nilai dari : $\frac{\sqrt[4]{86-14\sqrt{37}}}{\sqrt{6+\sqrt{13+4\sqrt{3}}} - \sqrt{9-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}$

B. PEMFAKTORAN

Pemfaktoran dalam soal olimpiade, selain mempergunakan rumus abc, bisa juga sedikit 'tricky' seperti pada contoh berikut

Contoh :

Faktorkan :

1. $(x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+5) \cdot (x+7) + 15$

2. $x^2 + x \cdot y - 6 \cdot y^2 - x + 7 \cdot y - 2$

3. $x^4 - 3 \cdot x^3 + (a+2) \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x$

Latihan :

Faktorkan

1. $(x-5) \cdot (x+3) \cdot (x+6) \cdot (x-10) - 20 \cdot x^2$

2. $x^4 + 2 \cdot x^2 - 4 \cdot a \cdot x - a^2 + 9$

3. $(x+y)^4 + (x^2-y^2)^2 + (x-y)^4$

4. $a^2 \cdot (b-c) + b^2 \cdot (c-a) + c^2 \cdot (a-b)$

5. $(a+b+c) \cdot (bc+ca+ab) - abc$

6. $2x^2 + x \cdot y - 2 \cdot x + 7 \cdot y - y^2 - 12$

7. $(x^2 + 3 \cdot x - 2) \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 4) - 16$

8. $(x-3) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x+4) + 24$

9. $(x + 1).(2.x + 1).(3.x - 1).(4.x - 1) + 6.x^4$

10. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

C. PRINSIP TELESKOPING

Dengan prinsip teleskopik, kita dapat menyederhanakan bentuk mula-mula sehingga pada akhirnya ada bagian yang dapat tercoret

Contoh :

Tentukan nilai dari : $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \dots + \frac{1}{2005.2007.2009}$

Latihan :

1. Tentukan nilai dari :

$$\frac{1}{(\sqrt{1} + \sqrt{2})(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2})} + \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})} + \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{4})} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{255} + \sqrt{256})(\sqrt[4]{255} + \sqrt[4]{256})}$$

2. Tentukan nilai dari : $\sum_{k=1}^n k!(k^2 + k + 1)$

3. Tentukan nilai : $1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$

4. Tentukan nilai dari : $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}}$

5. Tentukan nilai dari : $\sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1}$

6. Misalkan $f(x) = \frac{2}{4^x + 2}$ untuk setiap x anggota bilangan real

Tentukan nilai : $f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + f\left(\frac{3}{2019}\right) + \dots + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

7. Tentukan nilai : $\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{2019}{2017! + 2018! + 2019!}$

8. Untuk setiap bilangan asli n dalam persamaan $x^2 + (2.n + 1).x + n^2 = 0$
mempunyai dua akar yaitu α_n dan β_n

Tentukan nilai dari : $\frac{1}{(\alpha_3 + 1)(\beta_3 + 1)} + \frac{1}{(\alpha_4 + 1)(\beta_4 + 1)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{20} + 1)(\beta_{20} + 1)}$

9. Tentukan nilai dari : $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+5+\dots+2019}$

10. Buktikan : $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\cos^n x} = \cot x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cdot \cos^n x}$

untuk setiap $x \neq k \frac{\pi}{2}$ dimana k merupakan bilangan bulat

D. INDUKSI MATEMATIKA

Induksi Matematika merupakan salah satu cara untuk membuktikan rumus Matematika

Langkah-langkah pengerjaan

Langkah (1) : Kita akan membuktikan untuk $n = 1$

Langkah (2) : Misalkan untuk $n = k$ benar

Langkah (3) : Kita akan membuktikan untuk $n = k + 1$ terbukti benar

Contoh :

Buktikan : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$

Latihan :

Buktikan

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n + 1) \right]^2$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

3. $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)} = \frac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

5. Bilangan $3^n + 1$ habis dibagi 2 untuk setiap bilangan bulat n dimana $n \geq 0$

6. Bilangan $10^n + 48.(4^n) + 5$ habis dibagi 9 untuk setiap bilangan bulat n

$$7. \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x \cdot \sin \frac{1}{2}nx}{\sin \frac{1}{2}x}$$

8. $3^n > n^3$ untuk setiap bilangan bulat positif dimana $n > 3$

9. $f(n) = x^n - y^n$ habis dibagi $(x - y)$

10. $f(n) = 8^n + 2x7^n + 6$ habis dibagi 14 untuk setiap bilangan asli n

E. SUKU BANYAK (POLINOMIAL)

Teorema Vieta

Kita sering mendengar istilah hasil tambah dan hasil kali akar-akar suatu suku banyak.

Rumus simetri akar tersebut dikenal dengan nama Teorema Vieta

(i) Suku banyak berderajat 2 (dua)

Keterangan : derajat adalah pangkat tertinggi dari variabel pada suku banyak tersebut

Suku banyak $a.x^2 + b.x + c = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

(ii) Suku banyak berderajat 3 (tiga)

Suku banyak $a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ mempunyai akar-akar x_1 , x_2 dan x_3

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Contoh :

Akar-akar dari persamaan : $x^2 + 45.x - 8 = 0$ merupakan akar-akar pangkat tiga dari persamaan :

$x^2 + p.x - 2 = 0$. Tentukanlah nilai p

Latihan :

1. Jika a dan b merupakan akar-akar dari $x^2 + p.x + 1 = 0$ sedangkan

c dan d merupakan akar-akar dari $x^2 + q.x + 1 = 0$,

buktikan : $(a - c).(b - c).(a + d).(b + d) = q^2 - p^2$

2. Jika $\alpha, \beta, \text{ dan } \gamma$ merupakan akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$

Tentukan nilai dari :

(i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

(ii) $(\alpha + \beta - \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \gamma - \beta)$

(iii) $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$

3. Diketahui :
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 121 \end{cases}$$

Tentukan nilai $x^4 + y^4 + z^4$

4. Persamaan $x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ mempunyai akar-akar α, β, γ

Tentukan persamaan yang akar-akarnya :

a. $\alpha^2\beta\gamma, \alpha\beta^2\gamma, \alpha\beta\gamma^2$

b. $2\alpha + \beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma$

5. Diketahui a dan b adalah dua dari empat akar dari persamaan $x^4 + x^3 - 1 = 0$

Buktikan ab adalah salah satu akar dari persamaan $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$

F. PERSAMAAN DAN SISTIM PERSAMAAN

Contoh :

1. Tentukan nilai $x^2 - y^2$ jika :

$$624x + 376y = 3496$$

$$376x + 624y = 2504$$

2. Tentukan nilai x dan y dari sistim persamaan berikut

$$\frac{1}{2x+3y-5} + \frac{7}{5x-8y+12} = 1$$

$$\frac{4}{2x+3y-5} + \frac{14}{5x-8y+12} = 1$$

Latihan :

1. Diketahui : a, b dan c bilangan tidak nol yang berbeda dan $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$

Buktikan : $|a.b.c| = 1$

$$x + y + z = 2$$

2. Diketahui : $x^2 + y^2 + z^2 = 3$
 $xyz = 4$

Tentukan nilai dari : $\frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$

3. Tentukan semua bilangan real (x, y) yang memenuhi :

$$y^2 - (x+8).(x^2 + 2) = 0$$

$$y^2 - (8+4.x)y + (16+16x - 5.x^2) = 0$$

4. Tentukan semua bilangan real x dan y yang memenuhi :

$$\begin{cases} x^4 + y^2 - xy^3 - \frac{9}{8}x = 0 \\ y^4 + x^2 - x^3y - \frac{9}{8}y = 0 \end{cases}$$

5. Diketahui $\begin{cases} {}^2\log x + {}^4\log y + {}^4\log z = 2 \\ {}^{16}\log y + {}^4\log z + {}^{16}\log x = 2 \\ {}^9\log z + {}^9\log x + {}^3\log y = 2 \end{cases}$

Tentukan nilai x.y.z

6. Tentukan nilai a, b dan c yang memenuhi :

$$\begin{cases} ab + a + b = 8 \\ ac + a + c = 17 \\ bc + b + c = 31 \end{cases}$$

7. Buktikan bahwa sistem : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases}$ tidak mempunyai solusi real

8. Tentukan nilai x, y, z anggota bilangan real yang memenuhi :

$$(y^2 - z.x) + (z^2 - x.y) = 12$$

$$(x^2 - y.z) + (z^2 - x.y) = 8$$

$$(x^2 - y.z) + (y^2 - z.x) = 2$$

9. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi :

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$$

10. Tentukan semua nilai x yang memenuhi persamaan : $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = \frac{10x}{3} - \frac{40}{x}$

G. KETAKSAMAAN (INEQUALITY)

G.1 NO SQUARE IS NEGATIVE

Ketaksamaan yang paling sederhana dalam Aljabar adalah :

$$x^2 \geq 0$$

Kesamaan akan berlaku jika dan hanya jika $x = 0$

Contoh :

Misalkan a merupakan bilangan real

Buktikan : $4a - a^4 \leq 3$

Latihan :

1. Misalkan x, y, z merupakan bilangan real

Buktikan : $x^2 + y^2 + z^2 \geq x.y + y.z - x.z$

2. Misalkan a, b, c, d merupakan bilangan real

Buktikan bahwa : $a - b^2, b - c^2, c - d^2$, dan $d - a^2$ tidak semuanya bernilai

lebih besar dari $\frac{1}{4}$

“ Siput masuk ke dalam bahtera Nuh dengan KETEKUNAN “

3. Tentukan semua bilangan real yang memenuhi sistem persamaan berikut :

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1} \end{cases}$$

4. Tentukan semua bilangan real $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang memenuhi :

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \dots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

5. Tentukan semua bilangan real (x, y, z) dimana $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = -1$

G.2 Quadratic Mean - Arithmetic Mean - Geometric Mean, Harmonic Mean

(QM - AM - GM - HM)

$$\text{Quadratic Mean (QM)} : \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$$\text{Arithmetic Mean (AM)} : \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Geometric Mean (GM)} : \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$\text{Harmonic Mean (HM)} : \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Untuk setiap bilangan real positif $x_1, x_2, \dots, x_n$ berlaku :

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

Kesamaan akan berlaku jika $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Contoh :

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} \geq \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

2. Untuk $a, b, c > 0$, buktikan :

$$(i) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

$$(ii) \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

3. Untuk $a, b, c > 0$, buktikan : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Nesbit's Inequality)

Latihan :

1. Buktikan : $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$

2. Untuk $a, b, c > 0$, buktikan :

$$(i) \quad \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$$

$$(ii) \quad \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$$

$$(iii) \quad \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$$

3. Jika $a, b, c > 0$ dan $(1+a)(1+b)(1+c)=8$, maka buktikan $a.b.c \leq 1$

4. Jika $a, b, c > 0$ dan $a.b.c=1$, buktikan : $\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3$

5. Jika $a, b, c > 0$ dan $a+b+c=1$, maka buktikan $\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right) > 64$

6. Tentukan semua solusi real dari sistem persamaan

$$\begin{cases} x + \frac{2}{x} = 2y \\ y + \frac{2}{y} = 2z \\ z + \frac{2}{z} = 2x \end{cases}$$

7. Tentukan semua solusi bilangan real positif a, b, c, d yang memenuhi :

$$\begin{cases} a+b+c+d=12 \\ abcd=27+ab+ac+ad+bc+bd+cd \end{cases}$$

8. Jika $a, b, c > 0$ dan $a+b+c=1$, maka buktikan : $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}$

9. Jika $a, b, c > 0$ dan $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, maka buktikan $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3$

10. Jika $a, b, c > 0$ dan $abc=1$, maka buktikan $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

H. CAMPUR-CAMPUR ALJABAR

Part 1.

1. Jika $a = 1 + \sqrt{5}$ dan $b = 1 - \sqrt{5}$, maka buktikan :

$$4.(a^n - b^n)^2 + (a^{n+1} - b^{n+1})^2 = 2\sqrt{5}.(a^{2n+1} - b^{2n+1})$$

2. Jika $a, b, c > 0$ dan $a+b+c=1$, maka buktikan $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq 8$

3. Tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan : $\sqrt{3x+2y-8} + (9x^2 - 4y^2 - 32)^2 = 0$

4. Misalkan a, b, c merupakan bilangan real berbeda dimana $a + b + c = 0$

$$\text{Buktikan : } \left(\frac{b-a}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9$$

5. Tentukan semua nilai x yang memenuhi persamaan :

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} + \sqrt{x^2 - 7x + 6} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 9x + 7}$$

6. Jika $a, b, c > 0$ dan $abc=1$, maka buktikan :

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

“ Jangan berdoa meminta kesempatan,

tetapi berdoalah supaya kamu siap ketika kesempatan itu datang “

7. Tentukan semua solusi bilangan real positif x, y, z yang memenuhi :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 - \frac{4}{x \cdot y \cdot z} \end{cases}$$

8. Buktikan untuk setiap bilangan positif n dan untuk setiap bilangan real $x \neq \frac{k\pi}{2^m}$

($m = 0, 1, \dots, n$, dan k merupakan bilangan bulat)

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

9. Misalkan a, b , dan c merupakan bilangan real dimana $a^2 + c^2 \leq 4b$

Buktikan untuk setiap $x \in R$ berlaku : $x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 1 \geq 0$

10. Jika a, b dan c merupakan sisi-sisi sebuah segitiga, dimana $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ tunjukkan segitiga tersebut merupakan segitiga sama sisi

11. Jika $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$, tentukanlah nilai $a^a b^b c^c$

12. Tentukanlah nilai x yang memenuhi $(\sqrt{3} + \sqrt{8})^x + (\sqrt{3} - \sqrt{8})^x = 34$

13. Jika $(x - y - 1)^2 + |2x + y + 4| = 0$, tentukanlah nilai $2x - 3y$

14. Sederhanakan $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$

15. Diketahui a, b dan c bilangan real positif dan $a + b + c = 1$.

Tunjukkan bahwa $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$

16. Prove that if $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$, then $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

17. If $x = \frac{1}{2}(\sqrt{111} - 1)$, find the value of $(2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54)^{2019}$

18. Aku adalah suatu bilangan yang terdiri dari 3 angka. Bilangan itu 48 kali jumlah angka-angkanya

Apabila bilangan itu dikurangi 198 diperoleh bilangan yang terdiri dari angka itu juga tetapi susunannya terbalik. Apabila angka ratusan dan puluhan ditukar tempatnya, maka diperoleh bilangan 90 lebih kecil dari bilangan semula. Siapakah aku ?

19.. Tentukan himpunan penyelesaian dari :

$$\begin{cases} x^3 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 3z^3 + x = 9z + 8 \end{cases}$$

20. Tentukan nilai dari : $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2019^2}\right)$

21. Diketahui $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 121 \end{cases}$

Tentukan nilai $x^4 + y^4 + z^4$

22. Diketahui x dan y adalah bilangan real positif yang memenuhi $x + y = 1$

Buktikan bahwa $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$

Part 2.

1. Diketahui $a \neq -b$, $a \neq -c$, dan $\frac{a}{a+c} + \frac{a}{a+b} + \frac{c}{a+b} = 1$

Buktikan : $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

2. Diketahui 3 bilangan positif a, b, c sehingga : $\frac{2016a}{2017b} = \frac{2017b}{2018c} = \frac{2018c}{2016a}$

Tentukan nilai : $\frac{2016a+2017b+2018c}{2016a+2017b-2018c}$

3. Jika $x = \frac{1\sqrt{2017}}{2}$, maka tentukan nilai $4x^{2018} - 4x^{2017} - 2016x^{2016}$

4. Tentukan nilai dari : $\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(12^4 + \frac{1}{4}\right)}$

5. Jika p, q dan r merupakan bilangan real $p \cdot q \cdot r = 1$, buktikan bahwa :

$$\frac{pq}{1+q+p \cdot q} + \frac{qr}{1+r+q \cdot r} + \frac{rp}{1+p+p \cdot r} = 1$$

6. Diketahui bilangan real x dan y ($x > y$) memenuhi sistem persamaan:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 9 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 20 \end{cases}$$

7. Diketahui m dan n merupakan bilangan asli yang memenuhi sistem persamaan:

$$m + 3n + 3m \cdot n = 79$$

$$m^2n + 3m \cdot n^2 = 336$$

Tentukan nilai $m^2 + n^2$

8. Diketahui x, y, z bilangan real yang memenuhi:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Tentukan nilai x .

9. Buktikan : $\frac{1}{2017} = \frac{1}{2017 \cdot 2018} + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} + \frac{1}{2020}$

10. Diketahui a dan b bilangan real sehingga:

$$a^3 - 3ab^2 = 44 \text{ dan } b^3 - 3a^2b = 8, \text{ tentukanlah } a^2 + b^2$$

11. Tentukanlah hasil dari : $\sqrt{1 + \frac{2}{5}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{6}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{7}} \cdot \dots \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{97}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{98}}$

12. Diketahui a, b dan c bilangan rasional berbeda, buktikan bahwa:

$$a + \frac{1}{b} = 5; \quad b = \frac{1}{c} = 12; \quad c + \frac{1}{a} = 13$$

Tentukan nilai $abc + \frac{1}{abc}$.

13. Jika a, b, c bilangan rasional berbeda, buktikan bahwa :

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

14. Tentukanlah akar-akar real dari persamaan : $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$

15. Tentukanlah akar-akar real dari persamaan : $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

16. Persamaan kuadrat $x^2 + ax + b + 1 = 0$ dengan a dan b bilangan bulat dan memiliki akar-akar bilangan asli.

Buktikan : $a^2 + b^2$ bukan bilangan prima.

17. Jika a, b, c bilangan real berbeda, buktikan bahwa:

$$\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0$$

18. Jika $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$, buktikan : $x + y = 0$

19. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi :

$$x^3 + y^3 + 6xy = 8$$

20. Diketahui a dan b adalah bilangan real sehingga :

$$a^3 - 3ab^2 = 44 \text{ dan } b^3 - 3a^2b = 8, \text{ tentukan nilai } a^2 + b^2$$

KETAKSAMAAN RAVI

Teknik untuk mengubah ketaksamaan sisi-sisi pada segitiga menjadi ketaksamaan bilangan-bilangan positif disebut Transformasi Ravi.

Jika lingkaran dalam (I, r) pada segitiga ABC menyinggung sisi BC, CA dan AB pada titik X, Y, Z, maka diperoleh :

$$a = y + z.$$

$$b = z + x.$$

$$c = x + y.$$

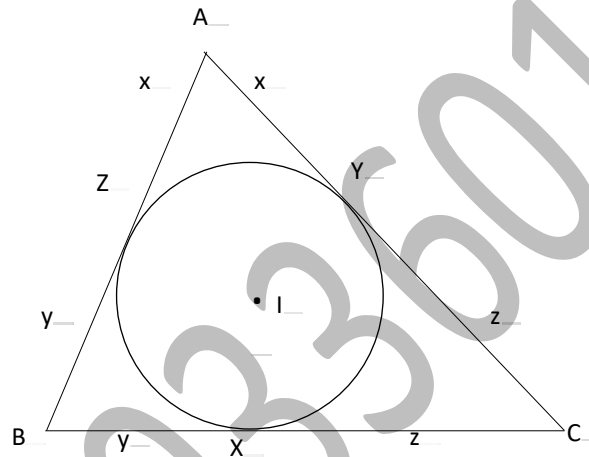
Jika

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c), \text{ maka ;}$$

$$x = s - a.$$

$$y = s - b.$$

$$z = s - c.$$



Cantoh:

1. Untuk setiap $a, b, c > 0$ berlaku : $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc$.
2. Misal a, b, c sisi-sisi pada segitiga, buktikan :

$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Latihan :

Misal a, b, c sisi-sisi pada segitiga, buktikan :

$$3. \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

$$4. \left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{8}.$$

$$5. a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$